УДК 330.43

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

В.Н. Долгих, С.П. Шаповалов*

Украинская академия банковского дела Национального банка Украины, г. Сумы;

**Сумский государственный университет, г. Сумы*

Обсуждаются недостатки методов предварительной линеаризации нелинейных относительно параметров функций регрессий. Предлагается определять параметры нелинейных регрессионных моделей, непосредственно минимизируя сумму квадратов отклонений экспериментальных точек от линии регрессии методами нелинейного программирования. Приведены примеры, демонстрирующие преимущества предлагаемого подхода по сравнению с методами, использующими линеаризацию.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Для описания и прогнозирования процессов в экономике часто применяют регрессионные модели. Однофакторное уравнение регрессии, связывающее условное среднее $\hat{y}$ переменной y с переменной x, задаётся в виде $\hat{y} = f(x, b_0, b_1, \ldots, b_m)$, где $b_0, \ldots, b_m$ – параметры, определяемые статистической обработкой выборки, состоящей из n пар чисел (x_i, y_i) $(i=1,2,\ldots,n)$. Как правило, оценки параметров b_j получают методом наименьших квадратов (МНК), из условий минимума суммы квадратов отклонений e_i фактических значений y_i от вычисленных по уравнению регрессии $\hat{y}_i$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i, b_0, b_1, \ldots, b_m)\right]^2 = Q(b_0, b_1, \ldots, b_m) \to \min \quad (1)$$

Приравнивая нулю частные производные функции Q по параметрам b_j, получают систему уравнений для их определения. Система будет линейной, если функция f линейна относительно параметров. Например, для функции $\hat{y} = a + bx$ получим:

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \Rightarrow b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}, \; a = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i\right). \quad (2)$$

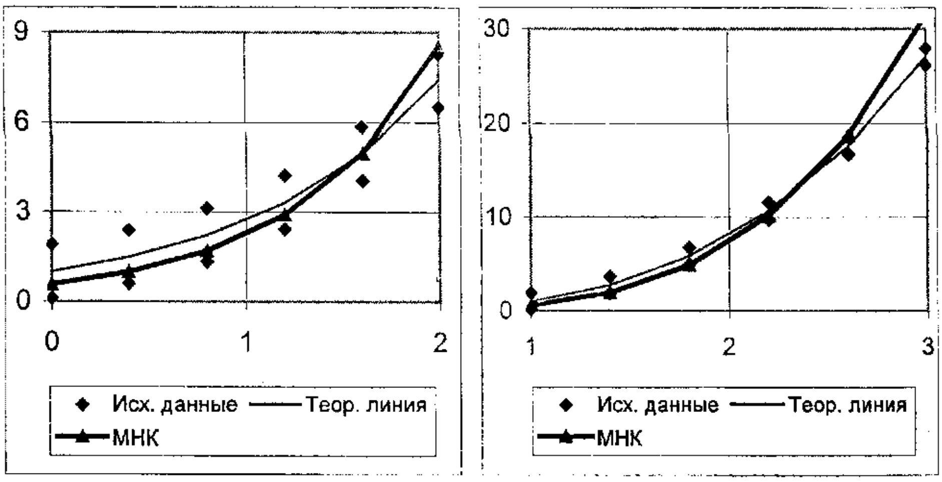
Для нелинейных относительно параметров регрессий (например, показательной $\hat{y} = ae^{bx}$ или степенной $\hat{y} = ax^b$) система уравнений также нелинейная. Для того чтобы избежать необходимости решения нелинейных систем, применяют процедуру линеаризации [1-6]. Показательное и степенное уравнения логарифмируют, например, показательное уравнение после логарифмирования примет вид $\hat{y}_* = a_* + bx$, где $\hat{y}_* = \ln \hat{y}$, $a_* = \ln a$. Параметры a_*, b вычисляют по формулам (2), с заменой y_i на $\ln y_i$. Функцию $\hat{y}=1/(a+bx)$ преобразуют к виду $\hat{y}_*=a+bx$, где $\hat{y}_*=1/\hat{y}$ и определяют параметры a, b по формулам (2), заменив y_i на $1/y_i$. Однако при замене y_i на $\ln y_i$ в формулах (2) минимизируется не сумма (1), а сумма $\sum(\ln y_i - \ln \hat{y}_i)^2$. При замене y_i на $1/y_i$ минимизируется сумма $\sum(1/y_i - 1/\hat{y}_i)^2$. В результате таких преобразований искажается принятая в МНК мера близости функции регрессии к экспериментальным точкам, а оценки параметров получаются смещёнными [7].

Цель статьи. Проиллюстрировать некорректность "линеаризации" нелинейных по параметрам регрессий и предложить иной способ оценки параметров.

НЕКОРРЕКТНОСТЬ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИЙ И СПОСОБ ЕЁ ПРЕОДАЛЕНИЯ

Воспользуемся тем фактом, что если экспериментальные точки расположены симметрично относительно некоторой линии, то эта линия и будет линией регрессии y на x. Для каждого значения x_i расположим по две "экспериментальные" точки на равных расстояниях $e_i=\pm 0{,}9$ относительно заданной "теоретической" кривой и по этим данным попытаемся восстановить уравнение "теоретической" кривой.

В качестве первой "теоретической" регрессии выберем показательную функцию $y=ae^{bx}$ с "теоретическими" параметрами $a=b=1$, заданную в точках $x_i = 0{,}4i$ ($i = 0,1,\ldots,5$) отрезка [0; 2]. Оценки параметров $\hat{a}=0{,}5805$, $\hat{b}=1{,}3424$, полученные МНК после логарифмического преобразования, значительно отличаются от "теоретических". Соответствующие кривые приведены на рис. 1а. Этот же результат получается и при построении экспоненциальной линии тренда в табличном процессоре Excel.



а) показательная *б) степенная*

Рисунок 1 – Теоретические показательная $y=e^x$ и степенная $y=x^3$ функции и кривые регрессии, найденные по МНК после логарифмирования

В качестве второй "теоретической" регрессии выберем степенную функцию $y=ax^b$ с параметрами $a=1$, $b=3$, заданную в точках $x_i=1+0{,}4i$

(i=0,1,...,5) отрезка [1; 3]. Параметры степенной функции $\hat{a}$ =0,57442, $\hat{b}$ =3,64287, найденные МНК после логарифмического преобразования, совпадают с параметрами степенной линии тренда в Excel и также значительно отличаются от “теоретических” (см. рис. 1б). На рис. 1а), 1б) видно, что графики показательной и степенной эмпирических регрессий, полученных после логарифмирования, в конце интервала выходят за пределы коридора, образованного “экспериментальными” точками. Пользоваться такими регрессиями для прогнозирования поведения функции за пределами интервала задания исходных данных нельзя.

Ещё хуже результат получается при замене y на $1/y^*$ в функции y=1/(a+bx). Для функции y = 1/(1 + x), заданной в точках x_i=0,4i (i = 0,1,...,5), расчётные значения параметров: $\hat{a}$ =1,63218, $\hat{b}$ = – 1,63863. Полученная “эмпирическая” функция имеет разрыв 2-го рода в точке $x \approx$ 0,9961, расположенной на отрезке [0; 2], на котором “теретическая” функция монотонна и непрерывна (рис. 2).

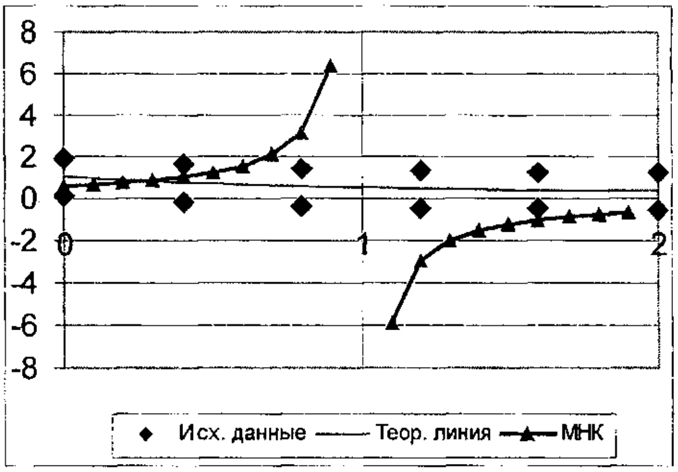


Рисунок 2 – Теоретическая регрессия y = 1/(1 + x) и эмпирическая функция регрессии $\hat{y} = 1/(1{,}63218\text{-}1{,}63863x)$, найденная по МНК после линеаризации

Приведенные примеры свидетельствуют о том, что логарифмическое преобразование показательной и степенной функций, а также замена y на $1/y^*$ в функции y = 1/(a+bx) не позволяют достичь приемлемой точности коэффициентов.

Для получения несмещённых оценок параметров нелинейных регрессий можно использовать нелинейный метод наименьших квадратов (НМНК), заключающийся в непосредственной минимизации суммы (1) методами нелинейного программирования. Для рассмотренных ранее примеров приведём оценки коэффициентов, полученные при помощи процессора Excel. Для показательной функции: $\hat{a}$ =1,000003, $\hat{b}$ =0,999998 (точные значения a=b=1), для степенной функции: $\hat{a}$ =1,000044, $\hat{b}$ =2,999956 (точные значения a=1, b=3), для функции y= 1/(a + bx): $\hat{a}$ = 1, $\hat{b}$ = 0,999999 (точные значения a=b=1).

Применим НМНК к подбору наилучшей нелинейной аппроксимирующей функции для исходных данных, приведенных в таблице 1 ([4]).

Таблица 1 – Курс акций за 9 недель

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	25	34	42	51	55	67	73	76	81

В таблице 2 результаты расчётов по НМНК сравниваются с результатами расчётов по МНК, полученными в работе [4] в результате преобразований исходных функций к линейному виду.

Таблица 2 – Выбор наилучшей функции регрессии по данным таблицы 1

Функция	Оценки параметров		$\sum e_i^2$	
	МНК	НМНК	МНК	НМНК
$\hat{y} = a \cdot b^x$	a=25,85; b=1,15	a=29,1979; b=1,1289	268	191
$\hat{y} = a \cdot x^b$	a=23,84; b=0,56	a=22,9962; b=0,57725	31	27,7
$\hat{y} = \exp(a + b / x)$	a=4,368; b=-1,301	a=4,5386; b=-2,0151	524	335,2
$\hat{y} = 1/(a + bx)$	a=0,03593; b=-0,003	a=0,028713; b=-0,00192	1998	389,6
$\hat{y} = 1/(a + b\ln x)$	a=0,0386; b=-0,0127	a=0,034752; b=-0,01044	223	73,6
$\hat{y} = x/(a + bx)$	a=0,0314; b=0,0107	a=0,046276; b=0,007413	304	78,7

Из таблицы 2 следует, что для всех рассмотренных типов функций непосредственная минимизация суммы $\sum e_i^2$ даёт лучшую аппроксимацию по сравнению с аппроксимацией, полученной в результате линеаризации исходной функции. Наилучшую аппроксимацию даёт степенная функция $\hat{y} = ax^b$ при a=22,9962, b=0,57725.

ВЫВОДЫ

Преобразование рассмотренных выше нелинейных по параметрам регрессий к линейному виду приводит к искажению принятой в МНК меры близости линии регрессии к экспериментальным точкам и неверным оценкам параметров. Непосредственная минимизация методами нелинейного программирования суммы квадратов отклонений экспериментальных точек от линии регрессии (НМНК) позволяет получать несмещённые оценки параметров регрессий. Предлагаемый подход пригоден и для оценки параметров других уравнений регрессий.

SUMMARY

TO QUESTION ABOUT CONSTRUCTION OF NONLINEAR REGRESSIVE MODELS

Dolgih V.N., Shapovalov S.P.*
Academy of Banking of the NationalBbank of Ukraine
** Sumy State University*

The methods preliminary linearisations of nonlinear functions of regresses are criticized. To define the parametres of nonlinear equations it is suggested to minimize the sum of squares of errors with the help of methods of nonlinear programming. The examples are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородич С. А. Эконометрика: Учеб. пособие. - Мн.: Новое знание, 2001. – 408 с.
2. Доугерти К. Введение в econометрику: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 402 с.

3. Лук'яненко І. Г., Краснікова Л. І. Економетрика: Підручник. – К.: Тов. "Знання", КОО, 1998. – 494 с.
4. Назаренко А. М. Основы эконометрики: Учеб. пособие. – Сумы: СумГУ, 2003. – 108 с.
5. Наконечний С. І., Терещенко Т. О., Романюк Т. П. Економетрія: Підручник. – Вид. 2-ге. – К.: КНЕУ, 2000. – 296 с.
6. Толбатов Ю. А. Економетрика: Навч. посібник. – К.: Четверта хвиля, 1997. – 320 с.
7. Четыркин Е. М., Калихман И. Л. Вероятность и статистика. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 319 с.

Долгих В.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент;
Шаповалов С.П., канд. физ.-мат. наук, доцент

Поступила в редакцию 9 июня 2008 г.